數學傳播　48卷1期, pp. 47-53

廣義柯西不等式之證明的再探

連威翔

一、前言

筆者利用 Google 搜尋「廣義柯西不等式」這串關鍵字後, 發現出現的頭兩篇文章是 [1] 與 [2]。在 [1], [2] 兩作品中都介紹了廣義柯西不等式的證明(其中 [2] 文較長, 見文中定理 3), 此處引用 [1] 文的寫法, 將廣義柯西不等式敘述如下:

定理1 (**廣義柯西不等式**): 任給 $m\times n$ 個非負實數

$$\begin{array}{cccc} a_{11}, & a_{12}, & \cdots, & a_{1n}, \\ a_{21}, & a_{22}, & \cdots, & a_{2n}, \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, & \cdots, & a_{mn}, \end{array}$$

其中 $m,n\ge 2$, 則有以下的不等式:

$$\begin{aligned} &({a_{11}}^m+{a_{12}}^m+\cdots+{a_{1n}}^m)({a_{21}}^m+{a_{22}}^m+\cdots+{a_{2n}}^m)\cdots({a_{m1}}^m+{a_{m2}}^m+\cdots+{a_{mn}}^m) \\ &\quad\ge (a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn})^m. \end{aligned} \tag{1}$$

注意 (1) 式上方寫成 m 列的 $m\times n$ 個非負實數中若有某一列的 n 個數全部爲零, 則 (1) 式不等號兩側均爲 0, 故 (1) 式成立。因此接下來我們只需關心 (1) 式上方的 m 列數其每一列的 n 個數皆不全爲零的情況, 在此情況下對滿足 $1\le i\le m$ 的任一個 i 值而言皆有

$${a_{i1}}^m+{a_{i2}}^m+\cdots+{a_{in}}^m>0. \tag{2}$$

將 (1) 式上方的 $m\times n$ 個非負實數寫成 $m\times n$ 矩陣如下:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \tag{3}$$

則 (1) 的左式就是先計算矩陣 (3) 的每一列(共 m 列) 所有元素的 m 次方和得到 m 個數後, 再計算這 m 個數的乘積; 而 (1) 的右式則是先計算矩陣 (3) 的每一行(共 n 行) 所有元素相乘而得 n 個乘積後, 再計算 n 個乘積之和的 m 次方。

筆者發現, 將 (1) 式改寫成與它等價的下式會較容易看出如何證明它:

$$\begin{aligned}&\sqrt[m]{{a_{11}}^m+{a_{12}}^m+\cdots+{a_{1n}}^m}\times\sqrt[m]{{a_{21}}^m+{a_{22}}^m+\cdots+{a_{2n}}^m}\times\cdots\\&\quad\times\sqrt[m]{{a_{m1}}^m+{a_{m2}}^m+\cdots+{a_{mn}}^m}\\&\geq a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}.\end{aligned}\tag{4}$$

在底下第二節中, 筆者將設法寫下 (4) 式的證明, 藉此完成 (1) 式的證明, 寫下此證明的動機是希望在 [1], [2] 兩文較簡短的證明之外提出較詳細的論證過程, 期待此證明能供有興趣的讀者參考, 並請不吝指教。

二、不等式之證明的再探

如同前一節最後一段所述, 本節內容將證明不等式 (4) 與 (1), 除此之外也會介紹不等式 (1) 等號成立的充要條件。觀察 (4) 式後, 我們令

$$M_i=\sqrt[m]{{a_{i1}}^m+{a_{i2}}^m+\cdots+{a_{in}}^m},$$

其中 $1\leq i\leq m$, 則由 (2) 式知對任意 i 值而言 M_i 均爲正數。由上式知

$${M_i}^m={a_{i1}}^m+{a_{i2}}^m+\cdots+{a_{in}}^m,\tag{5}$$

因此 ${M_i}^m$ 爲矩陣 (3) 的第 i 列所有元素的 m 次方和, 此時我們可先將 (4) 式改寫如下:

$$M_1M_2\cdots M_m\geq a_{11}a_{21}\cdots a_{m1}+a_{12}a_{22}\cdots a_{m2}+\cdots+a_{1n}a_{2n}\cdots a_{mn}.$$

上式不等號兩側同時除以正數 $M_1M_2\cdots M_m$ 後, 可將上式改寫爲等價的

$$\frac{a_{11}}{M_1}\cdot\frac{a_{21}}{M_2}\cdots\frac{a_{m1}}{M_m}+\frac{a_{12}}{M_1}\cdot\frac{a_{22}}{M_2}\cdots\frac{a_{m2}}{M_m}+\cdots+\frac{a_{1n}}{M_1}\cdot\frac{a_{2n}}{M_2}\cdots\frac{a_{mn}}{M_m}\leq 1,\tag{6}$$

觀察上式後, 對於滿足 $1\leq i\leq m$, $1\leq j\leq n$ 的正整數 i,j, 我們令

$$y_{ij}=\frac{a_{ij}}{M_i},\tag{7}$$

則對任意 i,j 而言 y_{ij} 均爲非負實數, 此時可再將 (6) 式改寫成較簡單的形式如下:

$$y_{11}y_{21}\cdots y_{m1}+y_{12}y_{22}\cdots y_{m2}+\cdots+y_{1n}y_{2n}\cdots y_{mn}\leq 1,\tag{8}$$

或者寫成

$$\sum_{j=1}^{n}y_{1j}y_{2j}\cdots y_{mj}\leq 1.\tag{9}$$

注意 (8) 左式中的每一項都是 m 個非負實數相乘的形式, 若問 m 個非負實數相乘的結果小於或等於什麼數, 則我們很可能會想到算幾不等式。由於 (8) 左式的各項形如 $y_{1j}y_{2j}\cdots y_{mj}$, 即 (9) 式中的一般項, 因此我們可利用算幾不等式寫下

$$y_{1j}y_{2j}\cdots y_{mj} \le \frac{{y_{1j}}^m + {y_{2j}}^m + \cdots + {y_{mj}}^m}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} {y_{ij}}^m. \tag{10}$$

爲了利用上式證明 (9) 式, 我們在上式兩端令 $j = 1, 2, \ldots, n$ 後將所得的 n 個不等式相加, 結果如下:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}y_{2j}\cdots y_{mj} \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} {y_{ij}}^m\Big). \tag{11}$$

我們可將上式不等號右側形如 y_{ij} 的 $m \times n$ 個非負實數寫成如下的矩陣:

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{m1} & y_{m2} & \cdots & y_{mn} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

則 (11) 右式中的雙重求和式就是在計算矩陣 (12) 中所有元的 m 次方和, 且計算的方式是先對矩陣 (12) 的每一行 (總共 n 行) 計算該行 m 個元的 m 次方和, 再將所得的 n 個數相加。我們可交換 (11) 右式中雙重求和式之求和順序, 將 (11) 式改寫爲

$$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}y_{2j}\cdots y_{mj} \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} {y_{ij}}^m\Big), \tag{13}$$

注意 (13) 右式中的雙重求和式也是在計算矩陣 (12) 中所有元的 m 次方和, 且計算的方式是先對矩陣 (12) 的每一列(總共 m 列) 計算該列 n 個元的 m 次方和, 再將所得的 m 個數相加。至此可知 (11), (13) 兩式不等號右側的兩個雙重求和式展開後的結果完全相同, 從而我們可利用 (11) 式的條件推得 (13) 式。

接下來, 我們將會利用 (13) 式的結果繼續進行推導, 以求證明 (9) 式。回顧 (5), (7) 兩式後, 我們可依序利用 (7) 式與 (5) 式寫下

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} {y_{ij}}^m &= \sum_{j=1}^{n} \frac{{a_{ij}}^m}{{M_i}^m} = \frac{1}{{M_i}^m}\sum_{j=1}^{n} {a_{ij}}^m \\ &= \frac{1}{{a_{i1}}^m + {a_{i2}}^m + \cdots + {a_{in}}^m}({a_{i1}}^m + {a_{i2}}^m + \cdots + {a_{in}}^m) = 1. \end{aligned} \tag{14}$$

將上式的結果代入 (13) 式後, 可得

$$\sum_{j=1}^{n} y_{1j}y_{2j}\cdots y_{mj} \le \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} 1 = \frac{1}{m}\times m = 1,$$

至此我們就證明了 (9) 式, 因此 (8) 式成立。從 (8) 式出發利用等價關係回推, 可依序推得 (6), (4), (1) 三式成立, 至此我們就證明了廣義柯西不等式 (1) 成立, 定理 1 證明完畢。

接下來我們探討不等式 (1) 等號成立的充要條件, 當不等式 (1) 的等號成立時, 利用等價關係可推得 (4), (6), (8) 三式的等號亦成立。注意 (8) 式等號成立的充要條件是 (10) 式對滿足 $1 \le j \le n$ 的所有正整數 j 寫下的 n 個不等式之等號均成立, 由算幾不等式等號成立的充要條件知前述條件成立若且唯若對滿足 $1 \le j \le n$ 的任一個 j 值均有

$$y_{1j} = y_{2j} = \cdots = y_{mj}.$$

利用 (7) 式將上述條件改寫, 可知對滿足 $1 \le j \le n$ 的任一個 j 值均有

$$\frac{a_{1j}}{M_1} = \frac{a_{2j}}{M_2} = \cdots = \frac{a_{mj}}{M_m},$$

利用上式的條件令

$$\frac{a_{1j}}{M_1} = \frac{a_{2j}}{M_2} = \cdots = \frac{a_{mj}}{M_m} = d_j,$$

其中 $1 \le j \le n$, 則我們有

$$a_{ij} = M_i d_j,$$

其中 $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$。因此對於滿足 $1 \le i \le m$ 的任一個正整數 i, 我們可寫下

$$a_{i1} : a_{i2} : \cdots : a_{in} = M_i d_1 : M_i d_2 : \cdot : M_i d_n = d_1 : d_2 : \cdots : d_n, \tag{15}$$

其中 $M_i > 0$, 從而我們有

$$a_{11} : a_{12} : \cdots : a_{1n} = a_{21} : a_{22} : \cdots : a_{2n} = \cdots = a_{m1} : a_{m2} : \cdots : a_{mn}, \tag{16}$$

上式即爲不等式 (1) 等號成立的充要條件。不妨進一步說明此充要條件, 此充要條件即以 (1) 左式 m 個括號內的 m 個形如 $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ 的 n 元實數組寫成的 m 個連比皆相等 (皆等於 (15) 式右端的 $d_1 : d_2 : \cdots : d_n$), 至此我們不但明白了廣義柯西不等式 (1) 的等號成立若且唯若 (16) 式成立, 也更清楚 (16) 式中構成 m 個連比的 m 組數與不等式 (1) 的關連性。

回顧前面對 (1) 式寫下的證明過程, 不難發現我們能成功寫下證明的關鍵有二, 第一個關鍵是先利用算幾不等式寫下 (10) 式, 第二個關鍵則是透過交換 (11) 右式中雙重求和式之求和順序以寫下 (13) 式。因此我們可以說, 第一節定理 1 所介紹的廣義柯西不等式 (1) 基本上是利用算幾不等式搭配「含有限項且足標取值獨立」(註 1) 的雙重求和式可交換求和順序之性質所得到的不等式。

本節的後半段, 我們不妨利用廣義柯西不等式求解一道例題。請讀者參考數學傳播 44 卷 2 期的 [3] 文, 注意 [3] 文中的例 1 如下:

例1: 已知 $x,y,z\in R^+$, 且 $x+y+z=1$, 求 $S=\sqrt[3]{x+\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{4y+2}+\sqrt[3]{9z+3}$ 的最大值。

此處我們可利用廣義柯西不等式寫下上述例題的另解, 解答如下:

解答: 先將 S 的表達式改寫爲

$$S=\sqrt[3]{x+\frac{1}{6}}+\sqrt[3]{4\Big(y+\frac{1}{2}\Big)}+\sqrt[3]{9\Big(z+\frac{1}{3}\Big)}. \tag{17}$$

令 $X=x+\frac{1}{6}, Y=y+\frac{1}{2}, Z=z+\frac{1}{3}$, 則 $X,Y,Z\in R^+$, 且

$$X+Y+Z=x+y+z+1=2, \tag{18}$$

此時 (17) 式可改寫爲

$$S=\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{4Y}+\sqrt[3]{9Z}. \tag{19}$$

利用第一節所介紹的廣義柯西不等式 (1), 在與 (1) 式等價的 (4) 式中令 $m=n=3$ 後將不等式反過來寫, 可得

$$\begin{aligned}&a_{11}a_{21}a_{31}+a_{12}a_{22}a_{32}+a_{13}a_{23}a_{33}\\&\le\sqrt[3]{{a_{11}}^3+{a_{12}}^3+{a_{13}}^3}\cdot\sqrt[3]{{a_{21}}^3+{a_{22}}^3+{a_{23}}^3}\cdot\sqrt[3]{{a_{31}}^3+{a_{32}}^3+{a_{33}}^3}.\end{aligned} \tag{20}$$

在上式中取

$$\begin{aligned}a_{11}=\sqrt[3]{X}, a_{12}&=\sqrt[3]{Y}, a_{13}=\sqrt[3]{Z},\\a_{21}=\sqrt[3]{1},\ a_{22}&=\sqrt[3]{2},\ a_{23}=\sqrt[3]{3},\\a_{31}=\sqrt[3]{1},\ a_{32}&=\sqrt[3]{2},\ a_{33}=\sqrt[3]{3},\end{aligned}$$

並搭配 (18) 式的條件, 可得

$$\begin{aligned}&\sqrt[3]{X}+\sqrt[3]{4Y}+\sqrt[3]{9Z}\le\sqrt[3]{X+Y+Z}\cdot\sqrt[3]{1+2+3}\cdot\sqrt[3]{1+2+3}\\&=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{6}\cdot\sqrt[3]{6}=2\sqrt[3]{9},\end{aligned} \tag{21}$$

再以上式的結果搭配 (19) 式可知 $S\le 2\sqrt[3]{9}$, 故 S 的最大值爲 $2\sqrt[3]{9}$。

當以廣義柯西不等式寫下的 (21) 式等號成立、使例 1 所關心的 S 取得最大值 $2\sqrt[3]{9}$ 時, 回顧前面 (16) 式中廣義柯西不等式等號成立的充要條件, 並搭配 (4) 式且令 $m=n=3$, 可知此時 (20) 式不等號右側三個 3 次根號內形如 a_{i1},a_{i2},a_{i3} 的三組數構成同一個連比, 即此時我們有

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33},$$

以上式搭配 (20) 式下方的設定, 可知此時有

$$\sqrt[3]{X} : \sqrt[3]{Y} : \sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{1} : \sqrt[3]{2} : \sqrt[3]{3}.$$

上式顯示 $X : Y : Z = 1 : 2 : 3$, 接著利用 (18) 式的條件可求得

$$X = \frac{1\times 2}{1+2+3} = \frac{1}{3}, \quad Y = \frac{2\times 2}{1+2+3} = \frac{2}{3}, \quad Z = \frac{3\times 2}{1+2+3} = 1,$$

將以上的 X, Y, Z 三數之值代入 (19) 式後, 確實會發現 $S = 2\sqrt[3]{9}$。最後回到 (18) 上方對 X, Y, Z 三數所作的假設, 可知當 S 取得最大值 $2\sqrt[3]{9}$ 時有

$$x = X - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}, \quad y = Y - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}, \quad z = Z - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

至此例 1 解題完畢。

三、結語

本文只是簡單的心得分享, 猶記得最初看到 [1] 文對廣義柯西不等式提出的證明後, 覺得雖然該證明很簡短, 但可能是因爲自己的能力不夠, 並不能馬上理解其中的脈絡。後來筆者又參考了 [2] 文, 文中對廣義柯西不等式介紹的證明很簡潔, 但是在拜讀該證明過後, 筆者仍想透過自己的想法來寫下證明。

經過了一段時間後, 筆者才完成第二節前半段對廣義柯西不等式提出的證明, 然而要提醒讀者的是, 第二節中的證明雖然篇幅較長, 但是基本上其證明的脈絡應與 [1], [2] 文相同。而本文寫作的目的, 是希望藉由在第二節中介紹的證明幫助讀者更清楚理解廣義柯西不等式 (1) 的證明脈絡。值得一提的是, 在第二節中我們證明了廣義柯西不等式 (1) 之後還探討了該不等式等號成立的充要條件, 這部分的內容是 [1], [2] 文並未多加著墨的。

註1: 先寫下 (11) 右式的雙重求和式如下:

$$\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m} {y_{ij}}^{m}\Big),$$

其中 m, n 皆爲不小於 2 的正整數, 注意上式完全展開後會包含 $m\times n$ 個形如 ${y_{ij}}^{m}$ 的項, 故上述雙重求和式展開後包含有限項。又上述雙重求和式中無論外層足標 j 的取值爲何, 內層足標 i 的取值範圍恆爲與 j 值無關的 1 至 m, 此即所謂的足標取值獨立。

參考文獻

1. 廣義柯西不等式。Articles,「丈哥的數學區」網頁。
   `https://oz.nthu.edu.tw/~u9721201/penguin2/math/article/GeneralCauchy.pdf`.
2. 林雲壽。柯西不等式的變形與推廣。科學教育月刊, 第 214 期, 1998 年 11 月。
3. 王鳳春。冪函數不等式的性質及其應用。數學傳播季刊, 44(2), 84-89, 2020。
4. 十二年國教國民中小學暨普通型高中數學領域課程手冊。國家教育研究院, 2020 年 2 月。

—本文作者投稿時正準備轉換工作跑道—